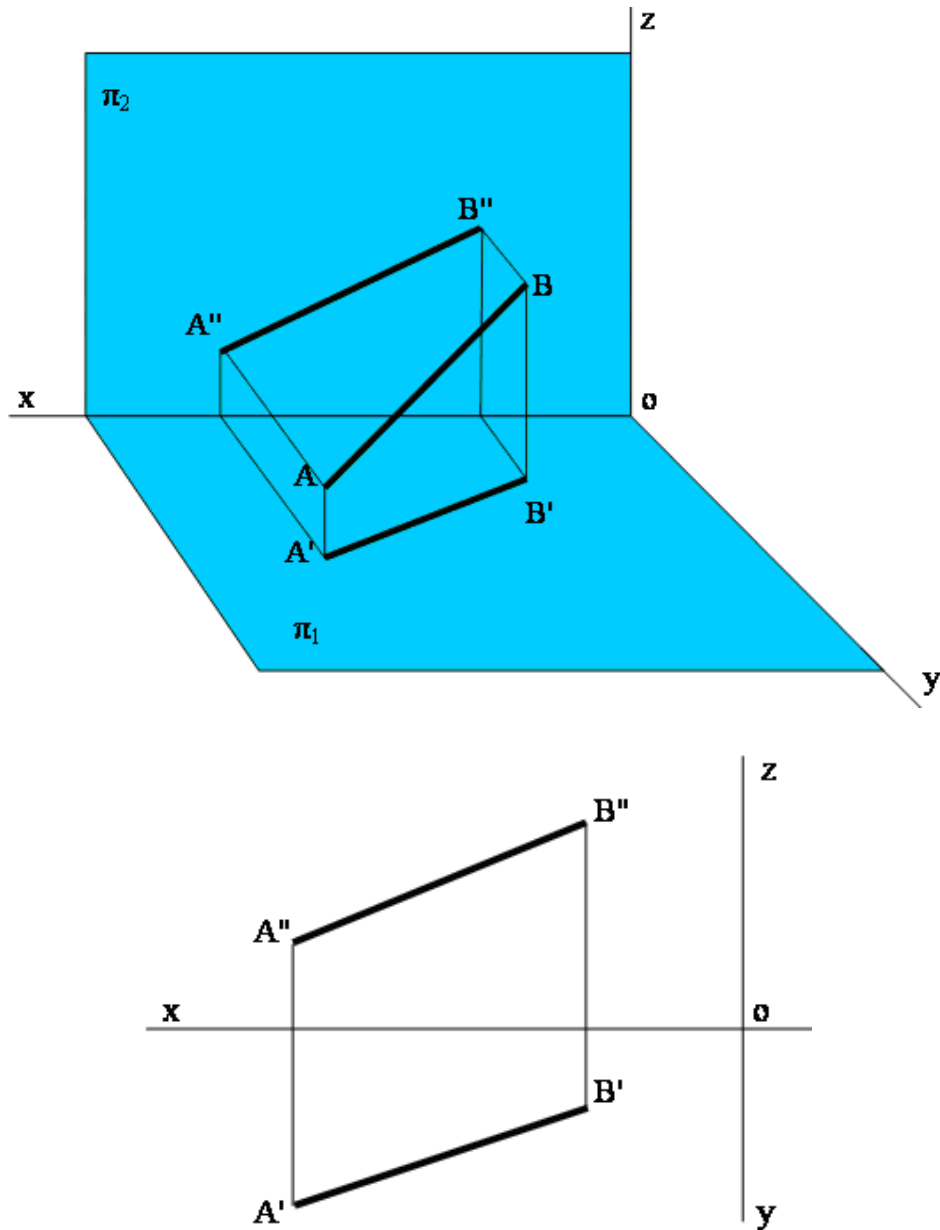


3 ТҮЗУ КЕСІНДІЛЕРІН ПРОЕКЦИЯЛАУ

3.1 Түзудің жалпы жағдайда орналасуы

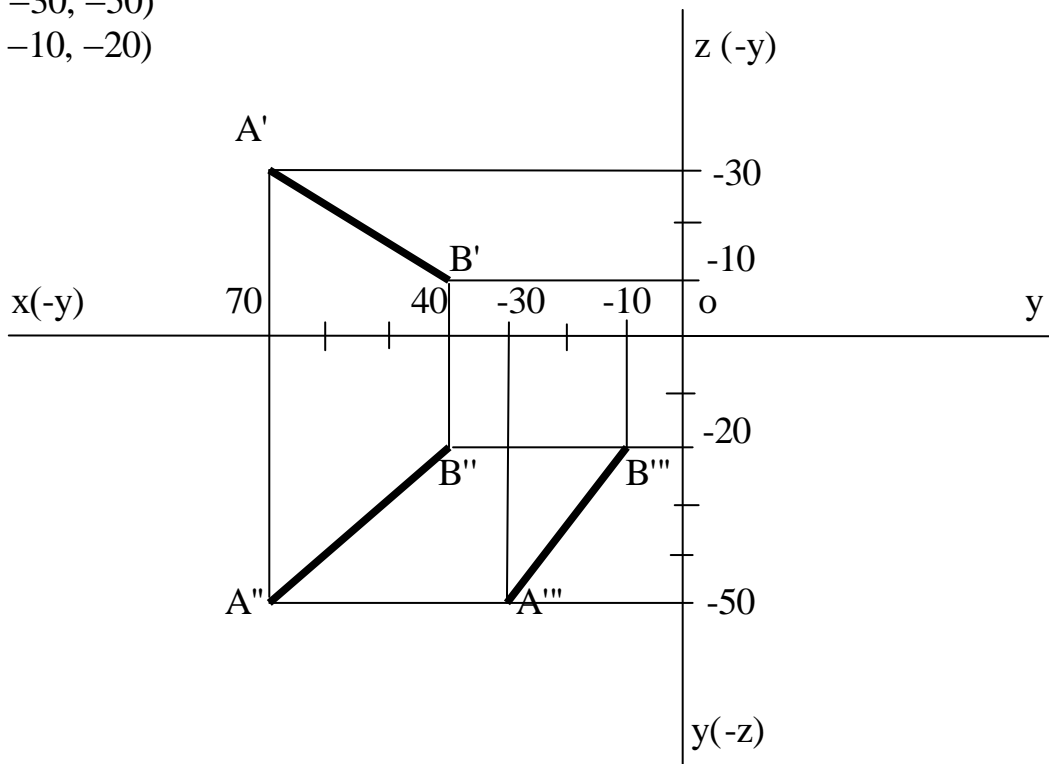
Түзудің кесіндісі екі нүктемен анықталады, түзу сызықтың сызбасын салу үшін, оның екі нүктесін салу жеткілікті. Кеңістікте түзу әр түрлі жағдайда орналасуы мүмкін. Егер түзу проекциялар жазықтықтарының бірде біреуіне параллель не перпендикуляр болмаса, ондай түзуді жалпы жағдайда орналасқан түзу дейді. Мысалы 16-ші суреттегі АВ кесіндісін алуға болады. АВ кесіндісі ешқандай проекция осіне параллель де, перпендикуляр да емес.



Сурет 16

Келесі мысалда 17-ші суретте АВ түзуінің горизонталь, фронталь және профиль проекцияларын салу қажет болса. X, Y, Z координата осьтерін жүргіземіз. Координаталар бойынша $A(80, -30, -30)$, $B(40, -10, -10)$ нүктелердің горизонталь, фронталь және профиль проекцияларын салып, аттас проекцияларын қосамыз. АВ түзудің $A'B'$ кесіндісі горизонталь, $A''B''$ кесіндісі фронталь, $A'''B'''$ кесіндісі профиль проекциясы болады.

$A(70, -30, -50)$
 $B(40, -10, -20)$

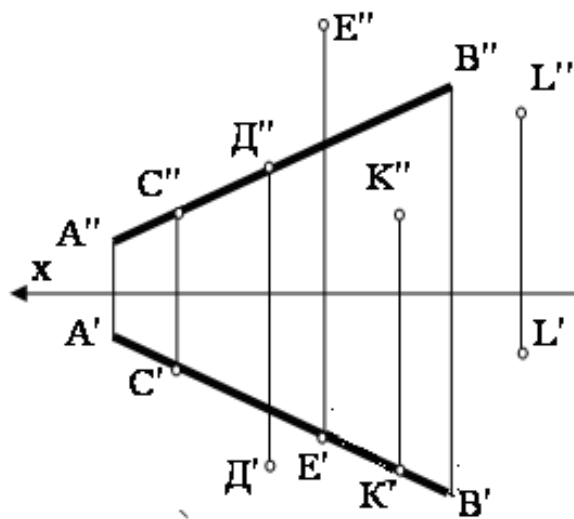


Сурет 17

3.2 Нүкте мен түзудің өзара орналасуы

Нүкте мен түзу кеңістікте екі түрлі орналасады: нүкте түзуден тыс немесе түзудің бойында жатпаса.

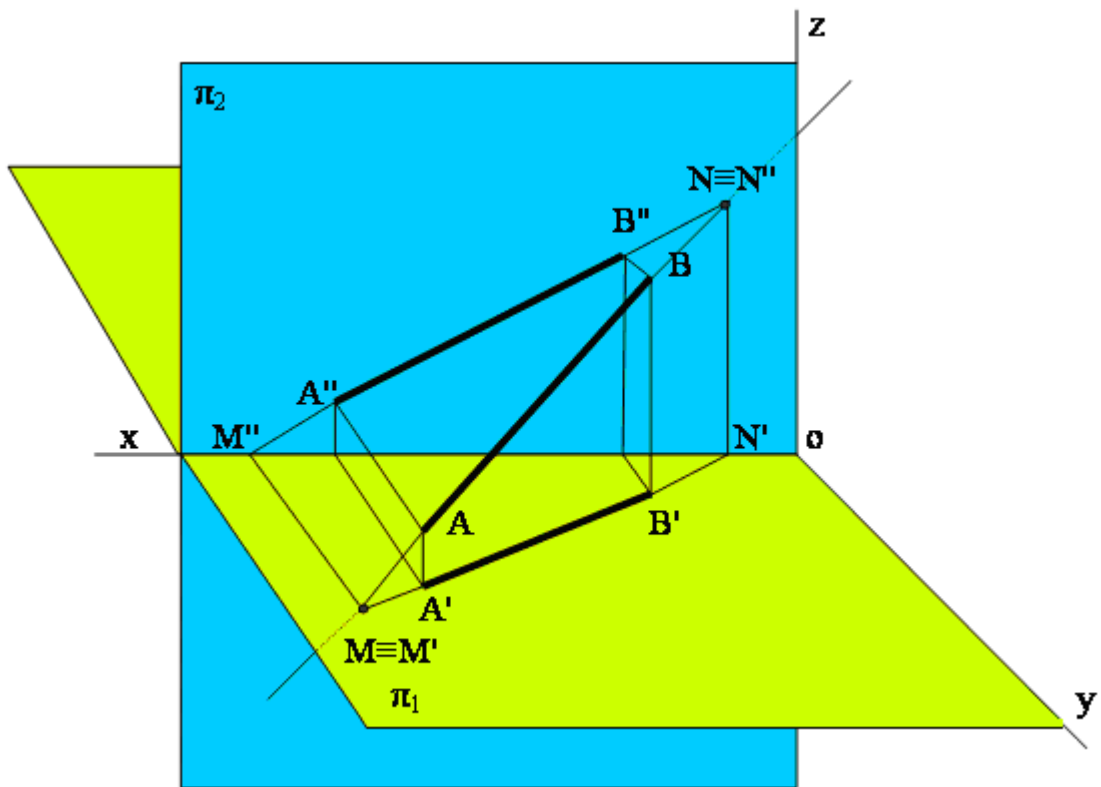
Егер түзу нүкте арқылы өтсе, онда түзудің проекциясы нүктенің проекциясы арқылы өтеді. Егер нүктенің проекциясының біреуі түзудің проекциясында жатпаса, онда нүкте түзуден тыс орналасқан. 18-шы суретте АВ түзуіне қарағанда: С нүктесі түзуге тиісті, Д нүктесі түзуден бері, Е нүктесі түзудің үстінде, К нүктесі түзудің астында, L нүктесі түзуден ары

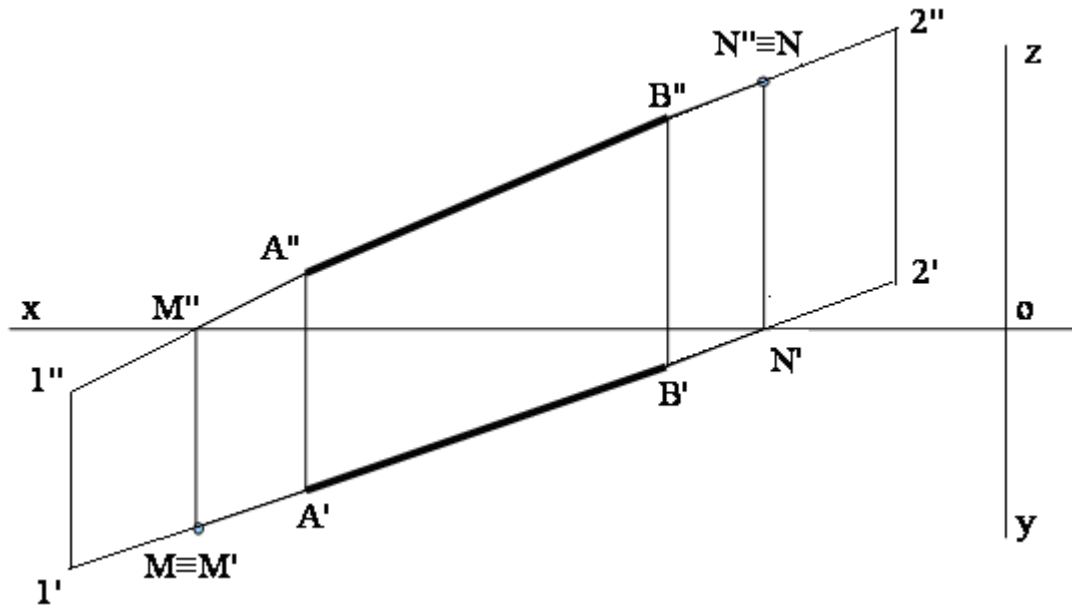


Сурет 18

3.3 Түзудің ізі

Проекция жазықтығында орналасқан түзу сызықты шексіз деп қарастырып проекция жазықтығымен қиылысқанға дейін созамыз. Түзу сызықтың проекция жазықтығымен қиылысқан нүктелері түзудің іздері деп аталады. Түзудің бір, екі немесе үш ізі болады, 19-ші суретте келтірілгендей.





Сурет 19

М нүктесі - түзудің горизонталь ізі. N нүктесі - түзудің фронталь ізі. АВ түзуінің горизонталь проекция жазықтығындағы горизонталь ізі М нүктесінің M' горизонталь проекциясына бәсекелес болады, M'' фронталь проекциясы OX осінде жатады. АВ түзуінің фронталь проекция жазықтығындағы фронталь ізі N нүктесінің N' фронталь проекциясында болады, N' горизонталь проекциясы X осінде жатады.

Сызбада АВ түзуінің горизонталь ізін салу үшін түзудің $A''B''$ фронталь проекциясын OX осіне дейін созамыз, қиылысқан жерін M'' белгілейміз де, осы нүктеден OX осіне перпендикуляр түсіріп $A'B'$ горизонталь проекциясын соза отырып қиылыстырамыз, қиылысқан жері $M'=M$, яғни горизонталь ізі болады. АВ түзуінің фронталь ізін салу үшін түзудің $A'B'$ горизонталь проекциясын OX осіне дейін созамыз, қиылысқан жерін M'' белгілейміз де, осы нүктеден OX осіне перпендикуляр түсіріп, $A''B''$ фронталь проекциясын соза отырып қиылыстырамыз, қиылысқан жері $N'=N$, яғни фронталь ізі болады. Іздердің орналасуына байланысты түзудің қандай ширектерден өтетінін анықтауға болады. Біздің түзуіміз IV, I, II ширектерден өтеді.

Түзудің профиль ізі де болады. Бұл із профиль проекция жазықтығында өз проекциясымен қиылысады, ал оның фронталь және горизонталь проекциялары OZ және OY осьтерінде жатады.

Берілген түзудің ізін және қайсы ширектен өтетінін анықтау үшін, АВ түзуі 28-ші суретте көрсетілгендей π_1 проекция жазықтығын N нүктесінде және π_2 проекция жазықтығын M нүктесінде тесіп өтеді.

Эпюрге АВ түзуінің қайсы ширектен өтетінін анықтау үшін, берілген координаталар бойынша түзудің горизонталь және фронталь проекцияларын саламыз. АВ түзуінің горизонталь ізі, М нүктесін салу үшін:

- түзудің А''В'' фронталь проекциясын ОХ осімен қиылысқанға дейін созамыз.
- қиылысқан нүктеден перпендикуляр түсіреміз.
- түзудің А'В' горизонталь проекциясымен қиылыстырамыз. Беттескен нүкте $M' \equiv M$ горизонталь ізі болады.

АВ түзуінің фронталь ізі, N нүктесін салу үшін:

- түзудің А'В' фронталь проекциясын ОХ осімен қиылысқанға дейін созамыз.
- қиылысқан нүктеден перпендикуляр түсіреміз.
- түзудің А''В'' фронталь проекциясымен қиылыстырамыз.

N нүктесі АВ түзуінің фронталь ізі. M нүктесі АВ түзуінің горизонталь ізі.

N нүктесі II ширекке өтіп жатыр. M нүктесі IV ширекке өтіп жатыр.

АВ түзуінің кеңістікте қайсы ширектерден өтетінін анықтау үшін әр нүкте қайсы ширекте орналасқанын анықтау қажет. Осы түзудің бойынан алынған 1-ші нүкте IV-ші ширекте, 2-ші нүкте II-ші ширекте орналасқан. Түзу IV-I-II ширектерден өтеді.

3.4 Түзудің ерекше жағдайда орналасуы

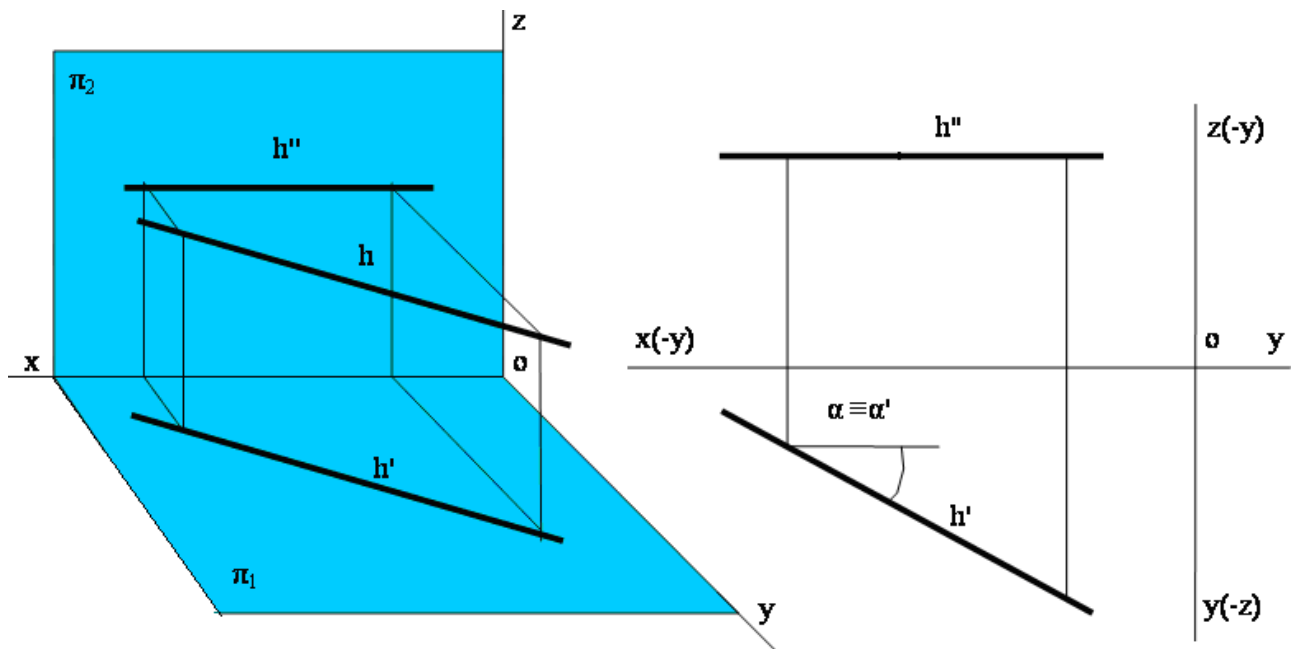
Кейде түзу проекция жазықтықтарына параллель немесе перпендикуляр орналасады. Бұл түзудің жеке жағдайда орналасуы деп аталады. Жеке жағдайда түзулер деңгейлік және проекциялаушы болып екіге бөлінеді:

1) Проекциялар жазықтықтарының біреуіне параллель орналасқан түзуді деңгейлік түзу деп атайды. Бұл жағдайда кесіндінің бір проекциясы кесіндінің тең болады

2) Проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр орналасқан түзуді проекциялаушы түзу деп атайды. Түзудің проекциясы кесіндінің нақты шамасына тең.

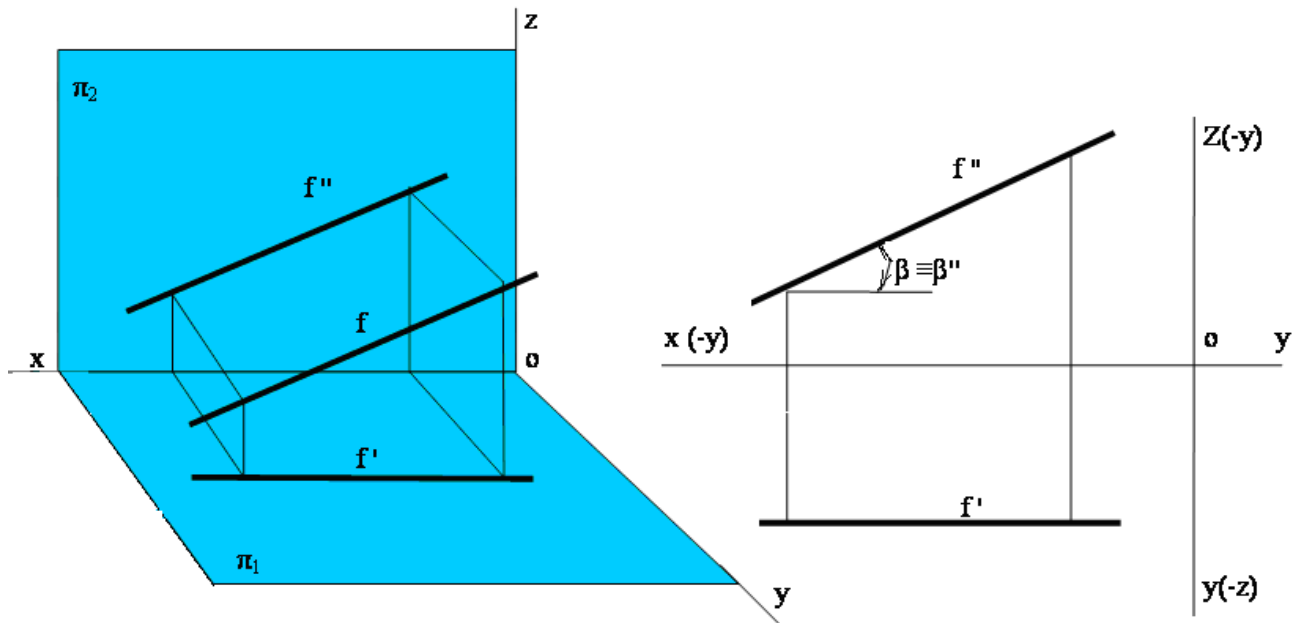
Сызба геометрияда деңгейлік түзулер үш топқа бөлінеді:

1) Горизонталь түзу – π_1 горизонталь проекция жазықтығына параллель болатын түзу. 20-шы суреттегі h түзуі, бұндай жағдайда түзудің фронталь проекциясы h'' проекция осіне параллель, ал горизонталь проекциясы h' кесіндісінің нақты шамасына тең болады $h' = h$.



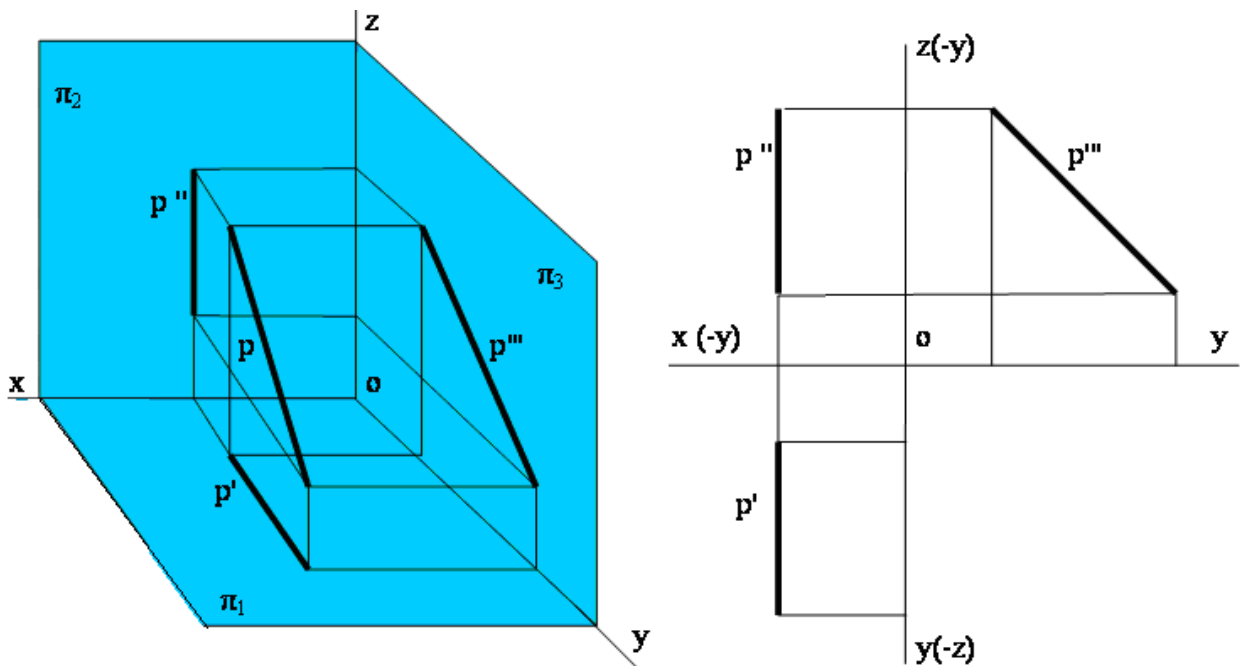
Сурет 20

2) Фронталь түзу - π_2 фронталь проекция жазықтығына параллель болатын түзу. 21-шы суреттегі f түзуі, бұндай жағдайда түзудің горизонталь проекциясы f' проекция осіне параллель, түзудің фронталь проекциясы f'' кесіндінің нақты шамасына тең болады.



Сурет 21

3) Профиль түзу – профиль проекция жазықтығына параллель болатын түзу. Мысалы 22-ші суреттегі p түзуі.

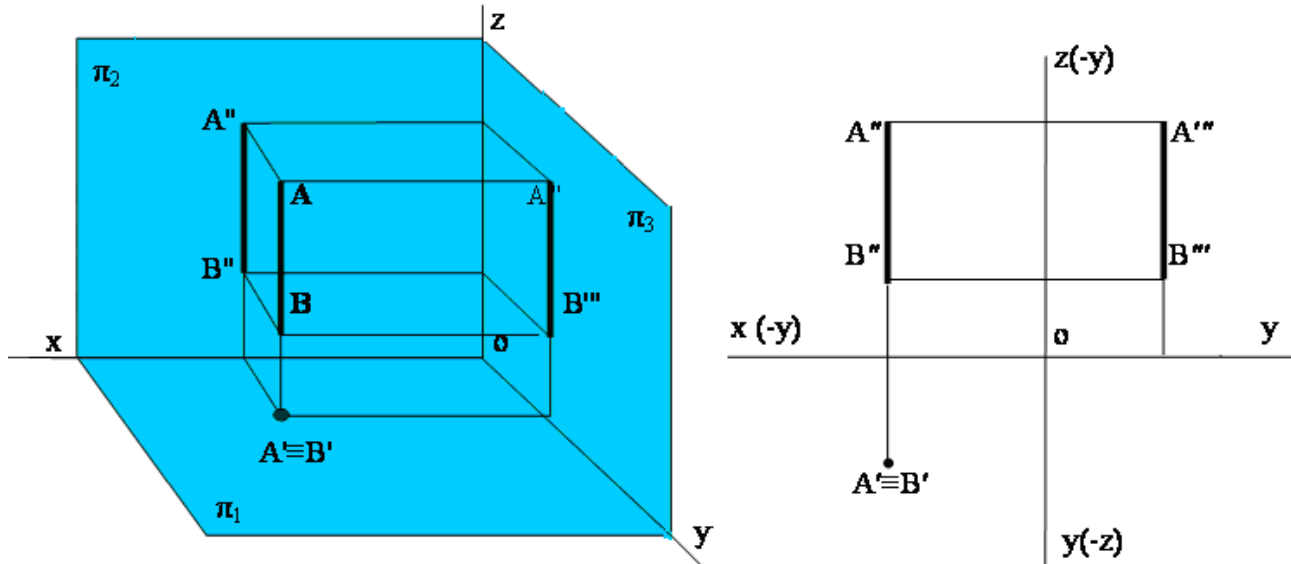


Сурет 22

Барлық деңгейлік түзулер қайсы жазықтыққа параллель болса, сол жазықтыққа нақты шамамен проекцияланады. Горизонталь түзу горизонталь проекция жазықтығына нақты шамамен проекцияланады. Деңгейлік түзу проекция жазықтығында жатуы мүмкін, ондай түзу нөлдік деңгейдегі түзу деп аталады.

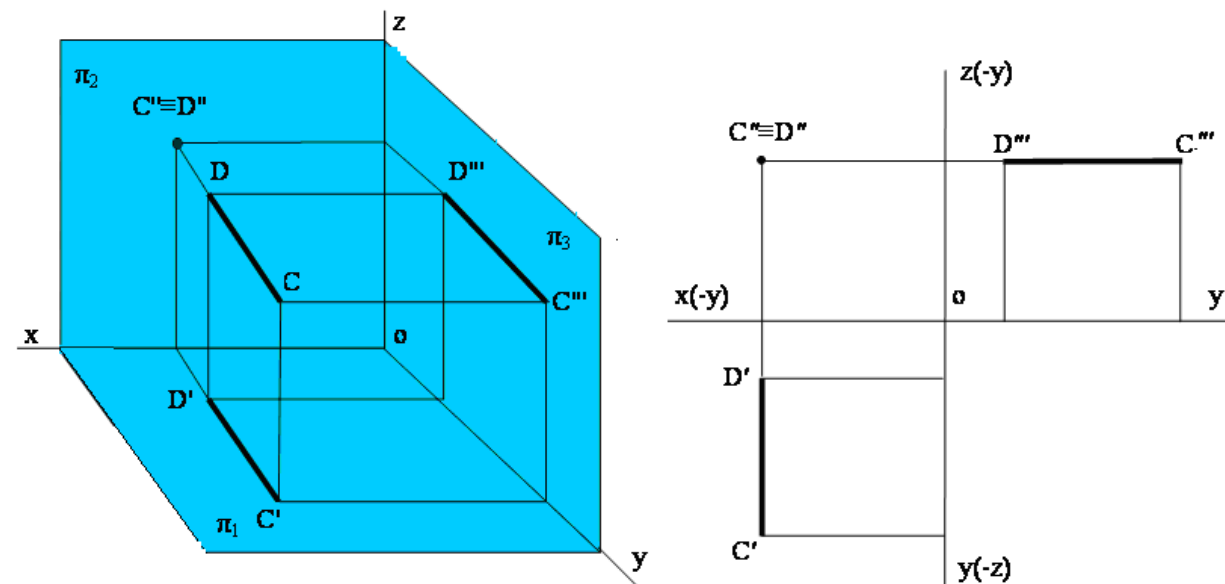
Проекциялаушы түзулер де үш топқа бөлінеді:

1) Горизонталь проекциялаушы түзу – π_1 горизонталь проекция жазықтығына перпендикуляр болатын АВ түзуі 23-ші суретте.



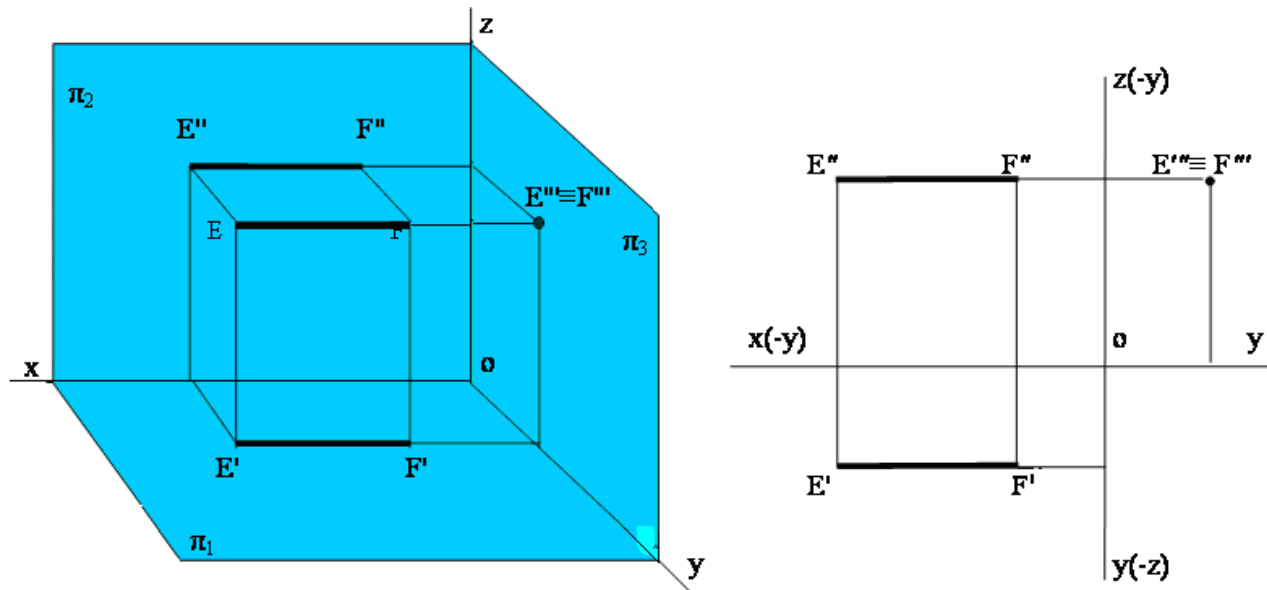
Сурет 24

2) Фронталь проекциялаушы түзу – фронталь проекция жазықтығына перпендикуляр болатын CD түзуі 25-ші суретте



Сурет 25

3) Профиль проекциялаушы түзу – профиль проекция жазықтығына перпендикуляр болатын EF түзу. Мысалы 26-ші суретте.



Сурет 26

3.5 Тік бұрышты үшбұрыш тәсілімен түзу кесіндісінің нақты шамасын және жазықтықпен көлбеулік бұрышын анықтау

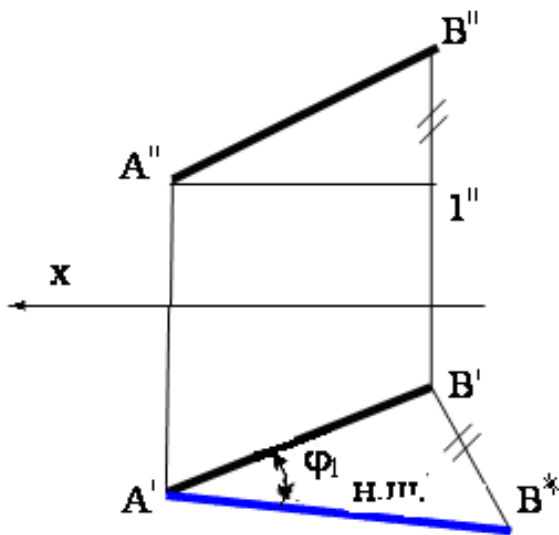
Жалпы жағдайда түзу кесіндісі ешбір проекция жазықтығына нақты шамамен проекцияланбайды. Бірақ, кейбір есептерде жалпы жағдайдағы кесіндінің сызбаны бойынша кесіндінің ұзындығын, немесе π_1 және π_2 проекция жазықтықтарына көлбеу бұрышын анықтау қажет болады. Осындай жағдайда тік бұрышты үшбұрыш арқылы салу тәсілі қолданылады. Жалпы жағдайдағы түзу кесіндісінің нақты шамасы тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына тең болады, егер оның бір катеті болып кесіндінің бір проекция жазықтығына түсірілген проекциясы алынып, ал екінші катеті ретінде кесіндінің ұштарының осы жазықтыққа дейінгі арақашықтықтарының айырмасы алынғанда.

AB түзуінің нақты шамасын анықтау үшін 27-ші суреттегідей ABV^* тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы болады, оның бір катеті кесіндісінің $A'B'$ проекциясына тең болса, ал екінші катеті кесінділерінің ұштарының π_1 проекция жазықтығына дейінгі арақашықтықтарының айырмасына $B_xV'' - A_xA''$ тең. π_1 горизонталь проекциядағы $A'B'$ кесіндісін тік бұрышты үшбұрыштың бір катеті деп алады, ал

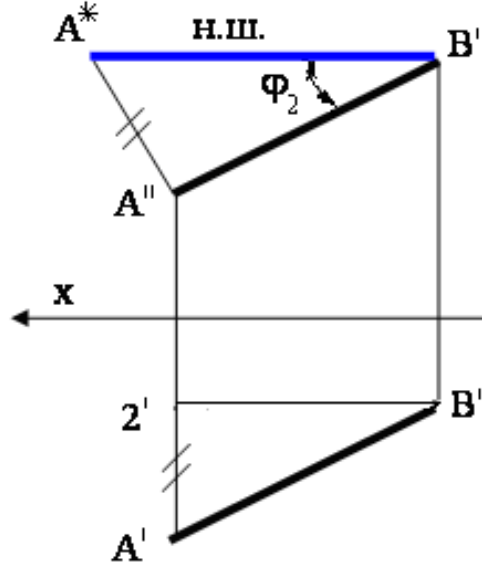
екінші катеті А және В нүктелерінің арақашықтығының π_1 горизонталь проекция жазықтығына дейінгі айырмасын алады. Бұл айырманы табу үшін A'' нүктесінен $B''B'$ байланыс сызығына перпендикуляр етіп көмекші түзу жүргіземіз, $B''1''$ екінші катеті. Қажетті сызуды салып, АВ кесіндісінің нақты шамасын табамыз. Сызбада ол $A'1'$ тең. Түзудің осы жазықтыққа түсірілген бұрышы проекциясы арқылы анықталады.

АВ кесіндісінің нақты шамасын тік бұрышты үшбұрыш тәсілімен тапқанда, тік бұрышты үшбұрыштың бір катеті ретінде кесіндінің горизонталь проекциясын алса, онда осы проекция мен тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы, яғни кесіндінің нақты шамасы арасындағы φ_1 - бұрышы кесіндінің π_1 горизонталь проекция жазықтығына көлбеулік бұрышына тең болады.

Егер АВ кесіндісінің нақты шамасын тапқанда, тік бұрышты үшбұрыштың бір катеті ретінде кесіндінің фронталь проекциясы алынса, онда осы проекциямен тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы, яғни кесіндінің нақты шамасы арасындағы φ_2 – бұрышы, кесіндінің π_2 фронталь проекция жазықтығына көлбеулік бұрышына тең болады. Мысалы 28-шы суретте келтірілген.



Сурет 27



Сурет 28

3.6 Екі түзудің өзара орналасуы

Кеңістіктегі түзулер өзара: параллель, айқаса, қиылыса орналасады.

1. Қиылысқан түзулердің ортақ бір нүктесі болады.
2. Түзулер параллель болғанда бір жазықтықта жатады.
3. Айқас түзулер бір жазықтықта жатпайды.

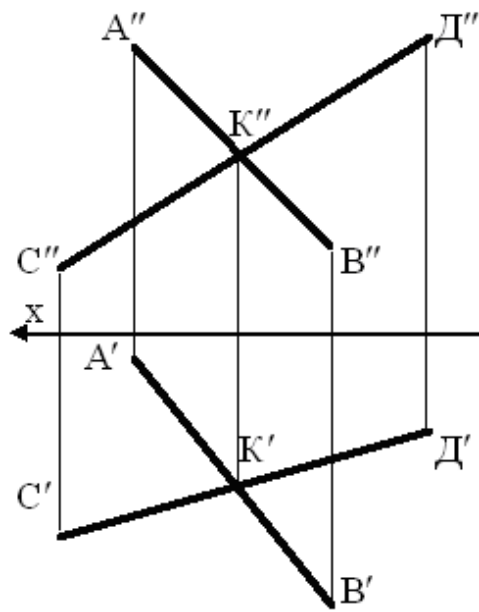
Егер түзулер бір нүкте арқылы өтсе қиылысады және олардың аттас проекциялары, яғни горизонталь, фронталь, профиль проекциялары өзара бір-бірімен бір нүктеде қиылысады.

АВ және СД түзулері өзара К нүктесінде қиылысады. 29-ші суретте К нүктесінің аттас проекциялары ($K'K''$) бір байланыс сызығында немесе ОХ өсіне түсірілген перпендикулярдың бойында жатады.

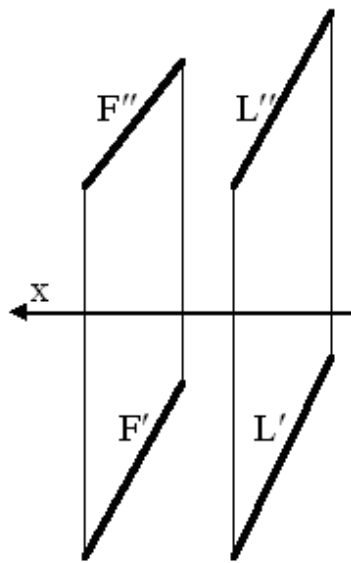
Егер F және L нүктелері арқылы жүргізілген түзулер кеңістікте бір-біріне параллель болса, онда сызбадағы аттас проекциялары, яғни горизонталь, фронталь, профиль проекциялары өзара бір-біріне параллель болады. 30-ші суретте ($F' || L', F'' || L''$).

Тетікбөлшекті бейнелеген кезде оның параллель қабырғаларының сызбадағы проекциясы да параллель болады. Керісінше сызбада параллель түзулер тетікбөлшекте де параллель болады. Бірақ бұл ереже профильді түзуге қатысты емес.

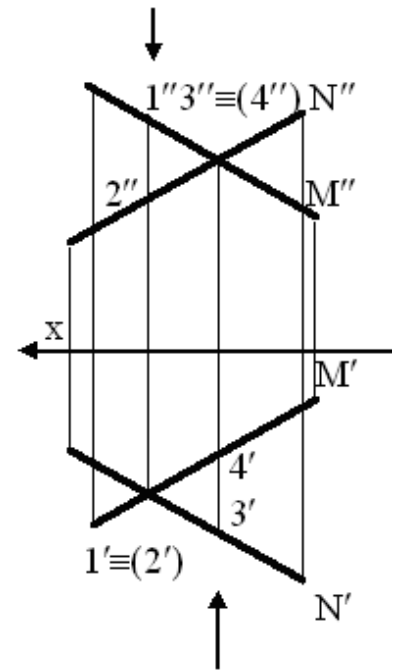
М және N нүктелері арқылы жүргізілген айқасып орналасқан түзулердің көрінетіндігін анықтау үшін π_1 мен π_2 жазықтықтары екі бөлек қарастырылады. π_1 жазықтығында қайсы нүкте бақылаушыға жақын орналасса, сол көрінеді, ал π_2 жазықтығында қайсы нүкте биік орналасса, сол көрінеді. 31-шы суретте 1-ші нүкте және 3-ші нүкте көрінеді.



Сурет 29



Сурет 30



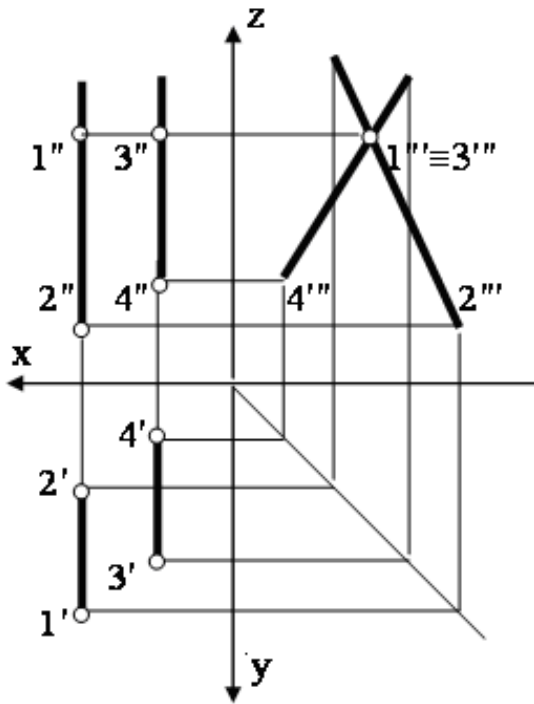
Сурет 31

Екі түзу бір-біріне параллель болмаса және қиылыспаса, олар айқасады. Егер сызбада екі түзудің аттас проекциялары параллель болса, онда олар кеңістікте де параллель болды.

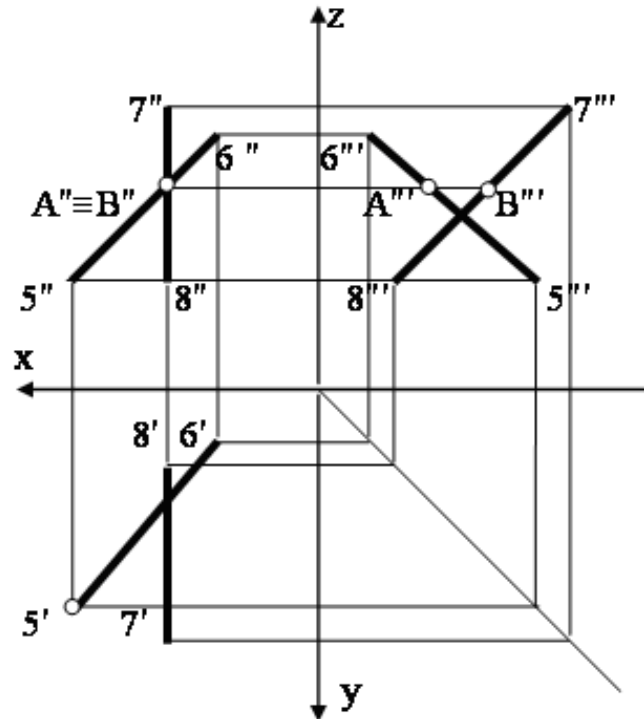
32-шы суреттегі түзулердің горизонталь және фронталь проекциялары параллель болып берілген, бұндай жағдайда түзулердің өзара орналасуын профиль проекциясы арқылы анықтауға болады. Түзулер айқасы орналасқан.

Келесі мысалда екі түзудің өзара қалай орналасқанын анықтау үшін түзулердің профиль проекциясын саламыз.

Сызбада А және В нүктесі арқылы жүргізілген екі түзудің аттас екі проекциясы, яғни горизонталь және фронталь проекциялары қиылысқан, онда олар кеңістікте де қиылысады. 33-ші суреттегі түзулер айқас орналасқан.



Сурет 32



Сурет 33

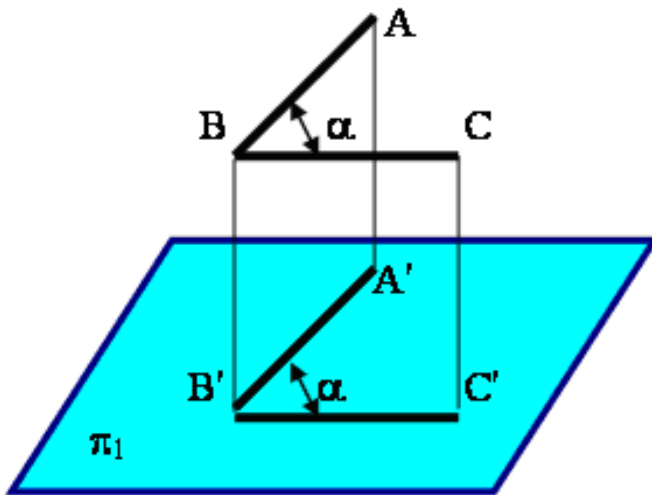
3.7 Сызбадағы тік бұрыштың проекциясы

Кез-келген сызықтық бұрыш екі түзу қиылысқанда пайда болады. Жалпы жағдайда олар проекция жазықтығына бұрмаланып проекцияланады. Бірақ, оның екі жақ бұрышы екі жазықтық проекциясына параллель болса, онда ол осы жазықтыққа еш өзгеріссіз проекцияланады, яғни нақты ақиқат шамамен проекцияланады.

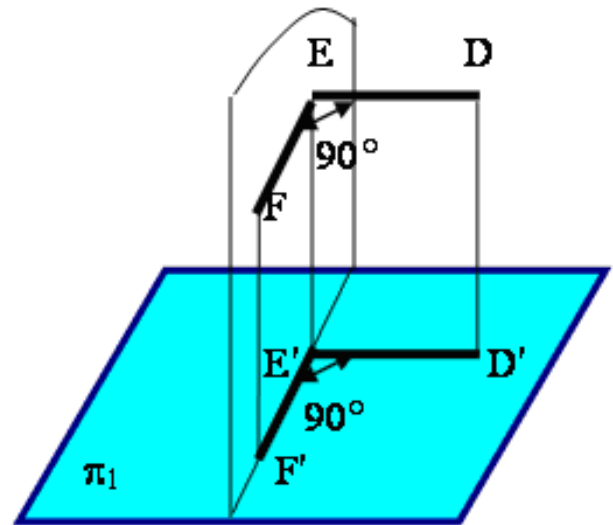
34-ші суретте ABC бұрышының жақтары π_1 горизонталь проекция жазықтығына параллель, сондықтан α бұрышы осы жазықтыққа өзгеріссіз проекцияланады. Тік бұрыштың нақты шамамен проекциялануы ерекше жағдайда қарастырылады. Осыған байланысты тік бұрышты проекциялау туралы теореманы қарастырамыз.

Тік бұрыш тік бұрышқа проекциялануы үшін оның бір қабырғасы проекция жазықтығына параллель, ал екінші қабырғасы перпендикуляр болуы қажетті және жеткілікті.

35-ші суреттегі FED тік бұрышының FE қабырғасы π_1 жазықтығына параллель, оның проекциясы $F'E'D' = 90^\circ$ – екендігін дәлелдеу керек. ED түзуі π_1 – жазықтығындағы FE және $F'E'$ түзулеріне перпендикуляр болғандықтан π_2 – ге де перпендикуляр. ED түзуі мен оның проекциясы $E'D'$ түзуі бір-біріне параллель болғандықтан, $E'D'$ де π_2 – ге перпендикуляр. Сондықтан $E'D'$ түзуі кез-келген осы жазықтықта жатқан түзуге перпендикуляр, соның ішінде $F'E'$ – да перпендикуляр, FED – бұрышы тік.

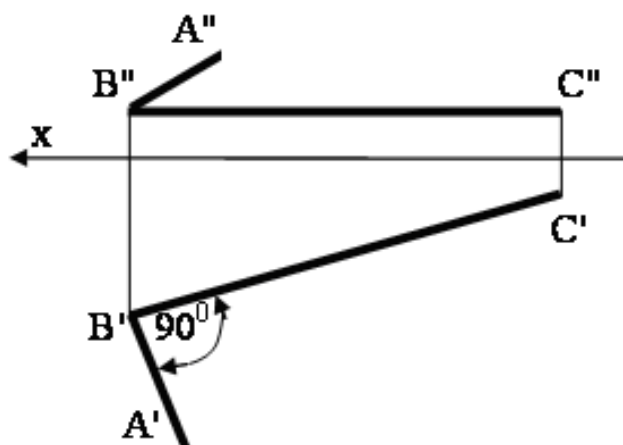


Сурет 34



Сурет 35

Егер ABC бұрышының BC қыры π_1 проекция жазықтығына параллель орналасса, онда бұрыш π_1 проекция жазықтығына тік бұрыш жасап проекцияланады. Мысалы 36-ші суретте кеңістікте $AB \perp BC$, $BC \parallel \pi_1$. Бұрыштың горизонталь проекциясы $A'B'C' = 90^\circ$



Сурет 36